Problemas de olimpiada: Grafos.

1. Sea G un grafo con n vértices y m aristas, demuestra que la suma de los grados de los vértices es $2m$.

2. Sea G un grafo disconexo, demuestra que su complementario es conexo.

3. Una arista en un grafo conexo se llama puente si al eliminarla el grafo pasa a ser disconexo. Demuestra que una arista es puente si y solo si no forma parte de un ciclo.

4. Prueba que un grafo es bipartito si y solo si no tiene un ciclo impar.

5. Sea G un grafo con número par de vértices, prueba hay un subconjunto de aristas tales que todo vértice es incidente a una cantidad impar de dichas aristas.

6. (Italia, 2007) Sea n un entero impar, hay n ordenadores y un cable uniendo cada par de ordenadores. Debes colorear los ordenadores y los cables de forma que:

   i. No hay dos ordenadores con el mismo color.
   ii. Dos cables unidos al mismo ordenador no tienen el mismo color.
   iii. Ningún ordenador tiene asignado un cable de su mismo color.

   Demuestra que esto puede hacerse usando n colores.

7. Sea G un grafo y sea $\chi(G)$ el mínimo número de colores requeridos para colorear G sin que dos vértices adyacentes tengan el mismo color, y sea m el número de aristas de G. Demuestra que:

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

8. (EEUU, 1986) 20 equipos juegan un torneo de fútbol. El primer día todos juegan un partido, al igual que el segundo día. Prueba que tras el segundo día se pueden seleccionar 10 tales que ninguna pareja de ellos ha jugado entre sí.

9. (BAMO, 2004) NASA ha propuesto poblar Marte con 2004 asentamientos. La única forma de moverse de un asentamiento a otro es a través de un túnel. Un burócrata aburrido decide dibujar de forma aleatoria N puentes entre los asentamientos. ¿Cuál es el mínimo valor que debe tomar N para asegurar que desde cualquier asentamiento se podrá viajar hasta cualquier otro?

10. (BAMO, 2005) En el país de Euleria hay 1000 ciudades, y algunas de ellas están unidas por caminos de tierra. Es posible viajar entre cualquiera dos ciudades usando estos caminos. Demuestra que el gobierno de Euleria puede asfaltar algunos de estos caminos de forma que cada ciudad tenga una cantidad impar de caminos que salgan de ella.

11. (San Petesburgo, 1996) En un grupo de personas, algunos se conocen y otros no. Para remediar esta situación, cada noche una persona organiza una velada en la que invita a todas las personas que conoce y las presenta entre ellas. Demuestra que, si tras organizar cada persona al menos una velada dos personas no se han conocido, entonces no se conocerán en la próxima fiesta.

12. Sea n un entero positivo, hay un grupo de $2n + 1$ personas en el que cada pareja de ellas son, o bien amigos, o bien desconocidos. Para cualquier conjunto S de tamaño n de entre dichas personas, hay una persona fuera de S que es amiga de toda persona de S. Demuestra que hay una persona que es amiga de todas las demás.

13. (IMO, 2001) Un k-clique es un grupo de personas tal que todas se conocen entre ellas. En una fiesta, cada pareja de 3-cliques tiene al menos una persona en común, y no hay 5-cliques. Demuestra que hay dos o menos personas en la fiesta cuya partida dejaría la fiesta sin 3-cliques

14. (IMO, 2007) En una competición matemática algunos competidores son amigos. La amistad siempre es mutua. Decimos que un grupo de competidores es un clique si todos son amigos entre sí (un grupo de dos amigos o menos es un clique). Sabiendo que en la competición el tamaño del mayor clique es par, prueba que los competidores se pueden organizar en dos aulas de forma que el tamaño del mayor clique en cada una de ellas es el mismo.